Publications mathématiques de Besançon
Algèbre et théorie des nombres

Patrick Rabarison, Fabien Pazuki, et Pascal Molin

**Exponentielle tronquée et autres contes galoisiens**

2024, p. 105-117.
https://doi.org/10.5802/pmb.57



*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de Besançon, UMR 6623 CNRS/UFC*

CENTRE MERSENNE

*Les* Publications mathématiques de Besançon *sont membres du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
http://www.centre-mersenne.org/
e-ISSN : 2592-6616

Publications mathématiques de Besançon – 2024, 105-117

# EXPONENTIELLE TRONQUÉE ET AUTRES CONTES GALOISIENS

*par*

Patrick Rabarison, Fabien Pazuki et Pascal Molin

***Résumé.*** — Nous faisons un tour d'horizon de résultats sur les groupes de Galois de troncatures de séries entières, avec la série exponentielle comme figure de proue. On propose ensuite de nouvelles explorations avec des calculs explicites de groupes de Galois d'approximants de Padé qui semblent jouir, eux aussi, de propriétés intéressantes.

***Abstract.*** — (*Truncated exponential and other tales of Galois groups*) We give a survey of results on the Galois group of polynomials obtained by truncation of power series, the main example being the exponential series. We also present some evidence of a new phenomena: Galois groups of Padé approximation polynomials seem to have special properties as well.

## 1. Introduction

Le calcul explicite de groupes de Galois de polynômes à coefficients rationnels est une entreprise passionnante et bien souvent difficile. La résolution du problème de Galois inverse pour le groupe des permutations $\mathcal{S}_n$ et son groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est classique et date de Hilbert, on pourra consulter [15] pour un exposé plus moderne. Une idée différente circulait déjà en 1929 : prendre une série entière à coefficients rationnels, la tronquer à l'ordre $N$ et chercher des informations galoisiennes sur le polynôme obtenu. Est-il irréductible ? Son groupe de Galois est-il particulier ? Peut-on le calculer ?
Schur a ouvert la voie avec les articles [20, 21] qui traitent de la série exponentielle

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

***Classification Mathématique (2020).*** — 11R32, 12F12.
***Mots clefs.*** — Groupes de Galois. Séries entières. Approximants de Padé.
***Crédits.*** — FP et PM sont soutenus par le projet ANR-17-CE40-0012 Flair. FP est soutenu par le projet ANR-20-CE40-0003 Jinvariant.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons l'exponentielle tronquée à l'ordre $n$ par

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \tag{1}$$

C'est un polynôme en $x$ de degré $n$, à coefficients rationnels. Est-il irréductible ? Quel est le groupe de Galois de $T_n$ ? Des calculs explicites menés en PARI/gp pour des petites valeurs de $n$ font apparaître une régularité qui aiguisera la curiosité du lecteur. On notera $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique d'indice $n$ et $\mathcal{A}_n$ son sous-groupe alterné formé des permutations paires. Le théorème de Schur est le suivant.

***Théorème 1.1.*** — *L'exponentielle tronquée vérifie les propriétés suivantes.*

a. *Soit $n$ un nombre entier non divisible par 4. Le groupe de Galois du polynôme $T_n$ est $\mathcal{S}_n$.*

b. *Soit $k \geq 1$ un entier naturel. Le groupe de Galois du polynôme $T_{4k}$ est $\mathcal{A}_{4k}$.*

C'est bien entendu la raison principale qui pousse à formuler la question classique suivante :

***Question 1.2.*** — *Quelles séries entières ont des troncatures qui jouissent de propriétés galoisiennes similaires à celles proposées dans le théorème 1.1 ?*

Un coup d'oeil à la section 2 permet de comprendre que les familles de polynômes orthogonaux sont jusqu'ici des acteurs importants dans cette pièce, mais on verra aussi dans les sections 3 et 4 que les polynômes impliqués dans la construction des approximations de Padé, en lieu et place des simples troncatures, pourrait s'avérer devenir une source d'exemples d'une nouvelle nature.
Ce premier texte de Schur a été suivi rapidement par [22] qui traite de polynômes de Laguerre $L_n$ définis pour tout entier $n \geq 0$ par

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-x)^k}{k!}$$

(notons que [22] traite aussi de la série exponentielle), puis par [23] qui porte encore sur les polynômes de Laguerre, et aborde de plus les polynômes de Hermite $H_n$, définis pour tout entier $n \geq 0$ par

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) x^{n-2k}.$$

Notre objectif ici est double. Nous présentons tout d'abord un tour d'horizon de travaux plus récents sur le même thème dans la section 2. Nous présentons ensuite en section 3 une étude basée sur des calculs menés en PARI/gp et qui indique que d'autres fonctions naturelles, dont certains approximants de Padé, jouissent de propriétés galoisiennes intéressantes, notamment les séries entières associées aux fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$ et $x \mapsto \sin(x)+\sinh(x)$. Ces résultats numériques poussent les auteurs à formuler la question suivante :

***Question 1.3.*** — *Quelles fonctions ont des approximants de Padé qui jouissent de propriétés galoisiennes particulières ?*

Nous concluons cette introduction avec les deux résultats suivants, en réponse partielle à la question 1.3. Le premier, le théorème 1.4, concerne les propriétés galoisiennes des approximants de Padé de la fonction exponentielle. Le second, le théorème 1.5, est nouveau et concerne la série entière associée à la fonction $x \mapsto (1+4x)^{-1/2}$ au voisinage de 0.
Nos premiers résultats numériques, rendus publics dans une première version de ce texte en 2020, portaient à croire que les groupes de Galois des numérateurs et dénominateurs des fractions rationnelles des approximants de Padé de la fonction exponentielle avaient pour groupes de Galois $\mathcal{S}_n$ ou $\mathcal{A}_n$. Cette observation a depuis été confirmée partiellement par [10], voici leur théorème (les définitions nécessaires sont rappelées en section 3).

***Théorème 1.4.*** — *Soient $P(m,k,x)$ et $Q(m,k,x)$ les approximants de Padé d'ordre $(m,k)$ de la série exponentielle.*

a. *Pour tout $m \geq 1$, les polynômes $P(m,m,x)$ et $Q(m,m,x)$ sont irréductibles et ont pour groupe de Galois $\mathcal{S}_m$.*

b. *Supposons que $P(m,m+1,x)$ et $Q(m,m+1,x)$ soient irréductibles. Alors le groupe de Galois de $P(m,m+1,x)$ est $\mathcal{A}_m$ si et seulement si ($m = 0 \pmod 4$ ou $m = 2(2k+1)^2-1$ pour un entier $k \geq 0$). Le groupe de Galois de $Q(m,m+1,x)$ est $\mathcal{A}_{m+1}$ si et seulement si $m = (2k+1)^2 - 1$ pour un entier $k \geq 0$.*

c. *Soit $p \geq 3$ un nombre premier et soit $n \geq 1$ un entier. Les polynômes $P(p^n, p^n+1, x)$, $Q(p^n, p^n+1, x)$, $P(p^n, p^n-1, x)$, $Q(p^n-1, p^n, x)$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.*

Le dernier résultat que nous mettrons à l'honneur est nouveau et concerne la série entière associée à $x \mapsto (1+4x)^{-1/2}$. Dans ce cas, et contrairement au cas de la série exponentielle, les troncatures de la série ne se comportent pas du tout (dans tous les cas testés) comme ses approximants de Padé. Plus précisément nous montrons l'énoncé suivant. Notons

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} + O(x^n), \deg(Q_n) \leq \frac{n}{2},$$

son approximant de Padé d'ordre $n$.

***Théorème 1.5.*** — *Les polynômes $P_n$ vérifient les propriétés suivantes, pour $n \geq 1$.*

a. *$P_n(x)$ a pour racines les $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ valeurs de $x$ telles que*

$$4x+1 = \left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^2, \text{ pour } \zeta^n = 1.$$

b. *$P_n(x)$ définit l'extension cyclotomique réelle $\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))$.*

c. *Le groupe de Galois de $P_n$ est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\}$.*

Il est intéressant d'ajouter que les premières troncatures de la série entière associée à la fonction $x \mapsto (1+4x)^{-1/2}$ ont toutes des groupes de Galois non-abéliens (voir section 4). Le texte se termine avec la section 4, qui détaille la preuve du théorème 1.5. On verra que cette preuve est essentiellement basée sur une relation de récurrence fonctionnelle satisfaite par les approximants de Padé considérés.

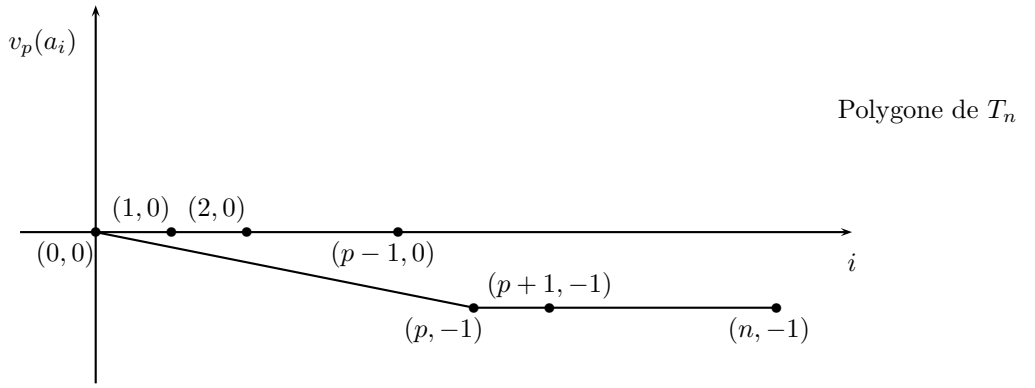
## 2. Tour d'horizon de résultats connexes

Les trois paragraphes suivants présentent trois directions de recherche. La première direction est la méthode des polygones de Newton, de loin la méthode la plus utilisée pour obtenir des résultats. La seconde direction est illustrée par un théorème de Chambert–Loir de type Jentzsch–Szegö. La troisième direction est une conséquence de la finitude des points rationnels sur les courbes de genre $g \geq 2$ (conjecture de Mordell, théorème de Faltings).

**2.1. La méthode des polygones de Newton.** — Coleman [5] donne une nouvelle preuve du théorème de Schur sur les troncatures $T_n$ de la fonction exponentielle (la formule explicite est rappelée en (1)) en utilisant les polygones de Newton. Il donne en exercice page 188 les cas des polynômes de Hermite et Laguerre. (On pourra aussi consulter [6].) Rappelons ce qu'est le polygone de Newton d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}_p(X)$ de degré $n$, où $p$ est un nombre premier et $v_p$ la valuation $p$-adique. Quitte à diviser $P$ par une puissance de $X$, puis par $P(0)$, on peut supposer que $P(0) = 1$, de sorte que $P(X)$ s'écrive

$$P(X) = 1 + a_1 X + \cdots + a_n X^n,$$

où les coefficients $a_i$ sont dans $\mathbb{Q}_p$ pour tout $i \in 1, \ldots, n$ et $a_n \neq 0$. Considérons l'ensemble $S$ des points du plan définis par $S = \{A_0 = (0,0)\} \cup \{A_i = (i, v_p(a_i)),$ tels que $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $a_i \neq 0\}$. Le polygone de Newton de $P$ est alors la frontière inférieure de l'enveloppe convexe de cet ensemble $S$. Il s'agit donc d'une ligne brisée, réunion de segments dont les extrémités sont dans $S$.
On peut alors retrouver des informations sur la factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{Q}_p[X]$ par le calcul de son polygone de Newton. Le polygone de Newton du polynôme $T_n$ (dont la formule explicite est rappelée en (1)) pour un choix de nombre premier $p$ satisfaisant $v_p(n!) = 1$ est de la forme suivante, si on note ses coefficients $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$.




Par le théorème 3.1 de [3, p. 100], on déduit que $T_n = R_1 R_2$ dans $\mathbb{Q}_p[x]$, avec $\deg R_1 = p$ et $\deg R_2 = n - p$. On dit que le polynôme $R_1$ est pur, de pente $-1/p$. Les travaux mentionnés à présent utilisent cette méthode de manière centrale.
Filaseta et Trifonov [12] démontrent l'irréductibilité des polynômes de Bessel sur $\mathbb{Q}$, définis pour tout entier $n \geq 0$ par

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{2^j (n-k)! k!} x^k,$$

achevant ainsi la démonstration d'une conjecture de Grosswald prédisant cette propriété. La méthode employée est basée sur les polygones de Newton, et le cœur de la preuve est une quête de nombres premiers vérifiant des conditions particulières.
Filaseta et Lam (2002, [11]) étudient l'irréductibilité de polynômes de Laguerre généralisés définis pour tout entier $n \geq 0$ et tout nombre rationnel $\alpha$ par

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!},$$

où on note $\binom{t}{k} = t(t-1)\dots(t-k+1)/k!$ pour tout $t$ rationnel et tout $k$ entier positif. Lorsque le paramètre $\alpha \in \mathbb{Q}$ est fixé et n'est pas un entier négatif, ils montrent l'irréductibilité de ces polynômes sur $\mathbb{Q}$, sauf pour un nombre fini de valeurs de $n$ (dépendant de $\alpha$). Ils utilisent une méthode proche de celle de Schur, avec en plus un argument basé sur une équation de Thue et un argument basé sur des progressions arithmétiques de nombres premiers.
Hajir [13] calcule le groupe de Galois de certains polynômes de Laguerre généralisés, notamment quand le paramètre $\alpha$ est un entier négatif (le cas laissé de côté par Filaseta et Lam). Il utilise aussi des polygones de Newton, ainsi que des critères d'irréductibilité de Coleman et de Filaseta.
Akhtari et Saradha [1] donnent une borne explicite $m_0$ à partir de laquelle les polynômes de Hermite et les polynômes de Laguerre (ainsi que certaines généralisations) de degré $m \geq m_0$ sont irréductibles ou presque irréductibles (un polynôme presque irréductible étant simplement un polynôme de degré $m$ produit d'un facteur linéaire et d'un polynôme de degré $m-1$). La méthode employée est naturellement basée sur les polygones de Newton, le théorème des progressions arithmétiques de Dirichlet, et la finitude du nombre de solutions entières des équations de Thue.
Cullinan et Hajir [8] étudient les polynômes de Legendre, définis pour tout entier $n \geq 0$ par

$$\mathrm{Leg}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}.$$

Ils conjecturent notamment que le groupe de Galois de $\mathrm{Leg}_{2n}$ est isomorphe au produit en couronne $\mathcal{S}_2 \wr \mathcal{S}_n$ et obtiennent des résultats partiels dans cette direction. La méthode employée repose sur le critère de Jordan : des informations sur la taille du groupe de Galois d'un polynôme $P$ peuvent être obtenues en observant leur polygone de Newton associé à un nombre premier peu ramifié dans le corps de décomposition de $P$. En utilisant des congruences dites de Holt–Schur (voir [8] pour plus de détails), ils obtiennent aussi des résultats dans le cas de ramification sauvage.
Shokri, Shaffaf et Taleb [24] étudient les troncatures à l'ordre $n$ des séries entières $1+\log(1-x)$, $1+\sin(x)$ et $\cos(x)$, par des méthodes proches de celles de Coleman [5], et obtiennent des conditions suffisantes sur $n$ pour démontrer que le groupe de Galois de ces troncatures est aussi gros que possible.

**2.2. Un théorème de Chambert–Loir à la Jentzsch–Szegö.** — Chambert–Loir [4] démontre un théorème de type Jentzsch–Szegö pour les séries entières à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ : le degré du facteur irréductible unitaire de plus grand degré pour une troncature de série entière (dont les coefficients satisfont une condition naturelle très générale) tend vers l'infini. Plus précisément, soit $p$ un nombre premier, soit $K$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, notons $K[\![X]\!]$ l'anneau des séries formelles en $X$ à coefficients dans $K$, et pour tout réel

$R > 0$, notons $K\{R^{-1}X\}$ l'ensemble des séries $\sum_{j\geq 0} a_j X^j$ de $K[\![X]\!]$ telles que $a_j R^j \to 0$ lorsque $j \to +\infty$. Le théorème de Chambert–Loir est le suivant.

***Théorème 2.1.*** — *Soit $f = \sum_{j\geq 0} a_j X^j \in K\{R^{-1}X\}$ et pour tout entier naturel $n$, notons $f_n(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ sa troncature à l'ordre $n$. Pour tout entier $d > 0$, pour toute sous-suite $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que $a_{n_k}^{1/n_k} \to 1/R$ lorsque $k \to +\infty$, le nombre de facteurs irréductibles unitaires de $f_{n_k}$ de degré inférieur ou égal à $d$ est $o(n_k)$. En particulier le degré du plus grand facteur irréductible unitaire de $f_{n_k}$ tend vers l'infini lorsque $k$ tend vers l'infini.*

Ce théorème indique donc que l'existence d'autres exemples de séries entières dont les troncatures sont des polynômes irréductibles est probable.

**2.3. Une conséquence de Mordell–Faltings.** — Cullinan, Hajir et Sell [9] obtiennent un résultat sur une sous-famille de polynômes de Jacobi. Les polynômes de Jacobi sont définis pour tout $n \geq 0$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ par

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k},$$

où on note $\binom{t}{k} = t(t-1)\dots(t-k+1)/k!$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ et tout $k$ entier positif. Ce sont des polynômes orthogonaux obtenus à partir de la série hypergéométrique ${}_2F_1$. On remarque que les polynômes de Legendre sont un cas particulier des polynômes de Jacobi : $\mathrm{Leg}_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$. Cullinan, Hajir et Sell s'intéressent plus précisément à la famille de polynômes

$$J_n(x,y) = (-1)^n P_n^{(-1-n,y+1)}(1-2x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{y+j}{j} x^j,$$

(voir [9, p. 97] et [8, p. 536] pour les calculs formels sur les expressions de ces polynômes) en utilisant des propriétés de la courbe plane définie par $J_n(x,y) = 0$. Ils montrent le résultat suivant.

***Théorème 2.2.*** — *Soit $n \geq 6$ un entier naturel. Le polynôme $J_n(x, y_0)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ pour tout $y_0 \in \mathbb{Q}$, sauf éventuellement pour un nombre fini d'exceptions. De plus, si $n$ est impair, le groupe de Galois de $J_n(x, y_0)$ est $\mathcal{S}_n$ pour tout $y_0 \in \mathbb{Q}$, sauf éventuellement pour un nombre fini d'exceptions. Si $n$ est pair, il existe un ensemble mince de $y_0 \in \mathbb{Q}$ pour lesquels le groupe de Galois de $J_n(x, y_0)$ est $\mathcal{A}_n$.*

La méthode employée suit celle de Hajir et Wong [14] et repose sur la Proposition 5.17 de [17], que nous rappelons ici.

***Proposition 2.3.*** — *Soit $k$ une extension finie de $\mathbb{Q}$. Soit $f(x,y) \in k(y)[x]$ un polynôme irréductible. Supposons que $f(x, y_0)$ n'est pas irréductible pour une infinité de valeurs $y_0 \in k$. Alors le corps de décomposition $L$ de $f(x,y)$ sur $k(y)$ contient un corps $E$ contenant $k(y)$ tel que $f(x,y)$ n'est pas irréductible sur $E$, de plus le corps $E$ est ou bien rationnel, ou bien le corps de fonctions d'une courbe elliptique avec rang de Mordell–Weil non nul.*

La stratégie de preuve du théorème 2.2 est donc en fait basée sur le théorème de Faltings (conjecture de Mordell) : une courbe définie sur $\mathbb{Q}$ de genre $g \geq 2$ n'a qu'un nombre fini de points rationnels. On montre que le genre de la courbe (désingularisée) définie par l'équation

$J_n(x,y)=0$ est supérieur ou égal à 2 dès que $n \geq 6$, donc cette courbe n'a qu'un nombre fini de points rationnels, on applique alors la contraposée de la Proposition 2.3.
Cullinan [7] étudie les polynômes de Laguerre généralisés $L_n^{(\alpha)}(x)$, où $n \geq 4$ est un entier naturel et $\alpha$ est un nombre rationnel, en regardant là aussi les courbes algébriques qu'ils définissent sur $\mathbb{Q}$. Il conjecture que la jacobienne d'une telle courbe n'a que très peu de points de torsion, est de rang strictement positif sur $\mathbb{Q}$, n'a pas de multiplication complexe et que ses représentations galoisiennes $\rho_\ell$ sont surjectives pour tout nombre premier $\ell \geq 3$.

## 3. Groupes de Galois d'approximants de Padé

En plus d'examiner des troncatures de certains polynômes orthogonaux, nous présentons à présent les premiers résultats, expérimentaux et théoriques, concernant l'arithmétique des approximants de Padé.

**3.1. Définition.** — Soient $m \geq 0$ et $k \geq 1$ deux entiers. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre $m+k+1$ à coefficients rationnels et telle que $f(0) \neq 0$. L'approximant de Padé [18] d'ordre $(m,k)$ est la fraction rationnelle :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{2}$$

vérifiant $\deg P \leq m$, $\deg Q \leq k$ et

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} + O(x^{m+k+1}), \tag{3}$$

où la notation $O(.)$ est liée à l'approximation au voisinage de 0. Le quotient $R$ est unique, $P \in \mathbb{Z}[x]$ et $Q \in \mathbb{Z}[x]$ le sont si on impose à la fraction d'être réduite. Dans ce qui suit, les approximations de Padé que nous considèrerons seront dites d'ordre $n$ : l'approximation de Padé d'une fonction $f$ sera le couple de polynômes $(P_n, Q_n)$ à coefficients entiers avec $\deg Q_n \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\deg P_n + \deg Q_n < n$ et tel que

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + O(x^n).$$

**3.2. Résultats numériques.** — Les calculs sont menés avec la fonction `bestapprPade()` implémentée dans [19]. On présente ici des calculs obtenus en utilisant le script suivant :

```
t(n) = bestapprPade(f(x+O(x^n)), n\2)
gn(n)=my(F=factor(numerator(t(n)))[,1]);F[#F];
[polgalois(gn(n)) | n <- [n_1..n_2]]
```

3.2.1. *Exponentielle.* — Commençons par considérer les approximants de Padé de la fonction exponentielle. Les premiers polynômes obtenus sont irréductibles. Par exemple, les cas $n=10$ et $n=13$ donnent

$$\begin{aligned}
P_{10} &= x^4 + 24x^3 + 252x^2 + 1344x + 3024,\\
Q_{10} &= x^5 - 25x^4 + 300x^3 - 2100x^2 + 8400x - 15120,\\
P_{13} &= x^6 + 42x^5 + 840x^4 + 10080x^3 + 75600x^2 + 332640x + 665280,\\
Q_{13} &= x^6 - 42x^5 + 840x^4 - 10080x^3 + 75600x^2 - 332640x + 665280.
\end{aligned}$$

Quelques calculs donnent aussi le tableau suivant, où $G(P)$ désigne le groupe de Galois du polynôme $P$ :

| $n$ | 10 | 13 | 17 | 18 | 19 | 26 | 34 | 40 | 41 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(P_n)$ | $\mathcal{A}_4$ | $\mathcal{S}_6$ | $\mathcal{S}_8$ | $\mathcal{A}_8$ | $\mathcal{S}_9$ | $\mathcal{A}_{12}$ | $\mathcal{A}_{16}$ | $\mathcal{S}_{19}$ | $\mathcal{S}_{20}$ | $\mathcal{A}_{20}$ |
| $G(Q_n)$ | $\mathcal{S}_5$ | $\mathcal{S}_6$ | $\mathcal{S}_8$ | $\mathcal{A}_9$ | $\mathcal{S}_9$ | $\mathcal{S}_{13}$ | $\mathcal{S}_{17}$ | $\mathcal{S}_{20}$ | $\mathcal{S}_{20}$ | $\mathcal{S}_{21}$ |

On constate donc là aussi une alternance de groupes symétriques et de groupes alternés ! Ces premières constatations, proposées dans une première version de ce texte diffusée sur ArXiv, ont motivé un travail récent de Cullinan et Sheel [10]. Ils identifient les approximants de Padé d'ordre $(m, k)$ de la fonction exponentielle par les formules

$$P(x) = P(m,k,x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(m+k-j)!}{k!} \binom{m}{j} x^j \quad \text{et} \quad Q(x) = Q(m,k,x) = P(k,m,-x).$$

Ils démontrent alors le théorème 1.4, répondant ainsi partiellement à la question 1.3 de l'introduction. La preuve repose en bonne partie sur une remarque de Hajir : les approximants de Padé de la fonction exponentielle sont en fait des cas particuliers de polynômes de Laguerre généralisés !

3.2.2. *Séries logarithmiques.* — Plus amusant encore, en considérant les approximants de Padé d'ordre $n \leq 30$ de la série

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots ,$$

seuls des groupes hyperoctahédraux (groupes de symétries des hypercubes) apparaissent comme groupes de Galois :

$$G(P_n) = B_t = C_2 \wr \mathcal{S}_t \text{ et } G(Q_n) = B_s = C_2 \wr \mathcal{S}_s ,$$

pour certains entiers $s$ et $t$, où on note $\wr$ le produit en couronne, et $C_2$ est le groupe cyclique à deux éléments. Dans la suite des approximants de Padé d'ordre $n \leq 30$ de la série

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots ,$$

on remarque qu'il y a apparition en alternance des groupes de type $\mathcal{S}_t$ et de type $B_t$.

3.2.3. *Fonction $x \mapsto \sin(x) + \sinh(x)$.* — Considérons la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \sin(x) + \sinh(x). \tag{4}$$

Nous sommes dans un cas où les groupes de Galois qui apparaissent lorsque l'on considère les approximations de Padé d'ordre $n \leq 30$ et ceux qui apparaissent lorsque l'on fait la troncature de la série entière obtenue à partir de $f$ sont du même type. Ceux-ci sont :

$$4T_3, 8T_{26}, 12T_{185}, 16T_{1758}, \dots \tag{5}$$

où pour $n, m \in \mathbb{N}$, la notation $nT_m$ est celle de Butler et McKay [2] et désigne le m-ième groupe transitif d'ordre $n$. Voir aussi [16] pour de plus amples informations sur ces groupes. Ceci laisse penser (à ce stade, ce n'est qu'une remarque basée sur des calculs numériques) que les groupes qui apparaissent sont des quotients de groupes de la forme

$$C_4 \wr (\mathcal{S}_k \oplus C_2),$$

où $C_4$ est le groupe cyclique d'ordre 4. On peut donc conclure ce paragraphe avec enthousiasme : il y a de jolies propriétés à découvrir sur cette voie !

3.2.4. *Fonction $x \mapsto (1+4x)^{-1/2}$.* — L'exemple le plus abouti de notre étude concerne la fonction $x \mapsto (1+4x)^{-1/2}$, et fait l'objet de la section 4.

## 4. Propriétés galoisiennes des approximations de la fonction $x \mapsto (1+4x)^{-1/2}$

Nous regroupons ici des résultats concernant les approximations de la fonction $x \mapsto (1+4x)^{-1/2}$. Le premier paragraphe est une remarque numérique : les troncatures de la série entière définissent des groupes de Galois non-abéliens dans tous les cas calculés. Le second paragraphe présente l'étude des approximants de Padé de cette même fonction, et nous donnons la preuve du théorème principal (le théorème 1.5) : les groupes de Galois obtenus sont abéliens !

**4.1. Troncatures.** — Écrivons le développement limité au voisinage de 0

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x}} = U_n(x) + O(x^{n+1}).$$

Le groupe de Galois de quelques $U_n(x)$ est donné dans le tableau suivant.

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 12 | 16 | 20 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(U_n)$ | $S_3$ | $\mathcal{A}_4$ | $S_5$ | $\mathcal{A}_{12}$ | $S_{16}$ | $S_{20}$ | $S_{21}$ | $\mathcal{A}_{24}$ |

Dans tous ces cas explicitement calculés, les groupes de Galois sont toujours soit $\mathcal{S}_n$, soit $\mathcal{A}_n$ pour ces polynômes issus de troncatures de la série entière associée, ils sont donc loin d'être abéliens. Nous n'avons pas encore de preuve de cette propriété.

**4.2. Approximants de Padé.** — Pour la fonction $x \mapsto (1+4x)^{-1/2}$ au voisinage de 0, l'approximant de Padé d'ordre $n \geq 1$ vérifie

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} + O(x^n).$$

Un calcul rapide montre, pour $n \leq 31$, que les polynômes $P_n$ et $Q_n$ obtenus ne sont pas toujours irréductibles, mais qu'ils semblent toujours définir des extensions abéliennes ! On peut lister quelques résultats dans le tableau ci-dessous, où $G(P)$ désigne le groupe de Galois du polynôme $P$, et $C_n$ le groupe cyclique d'ordre $n$ :

| $n$ | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(P_n)$ | $C_5$ | $C_6$ | $C_8$ | $C_9$ | $C_{11}$ | $C_{14}$ | $C_{15}$ |
| $G(Q_n)$ | $C_5$ | $C_6$ | $C_8$ | $C_9$ | $C_{11}$ | $C_{14}$ | $C_{15}$ |

Outre le fait que l'on obtient des groupes de Galois abéliens, on remarque que dans tous les cas explicitement calculés, les $P_n$ et $Q_n$ jouissent de propriétés de divisibilité semblables à celles des polynômes cyclotomiques :

(6) si $n|m$ alors $P_n|P_m$ et si de plus $m/n$ est impair alors $Q_n|Q_m$.

Ce n'est pas un hasard : on va à présent démontrer ces propriétés, ainsi que le caractère cyclotomique des polynômes $P_n$, comme annoncé dans le théorème 1.5.

Posons $y = \sqrt{1+4x}$, et considérons les approximants de Padé

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{1}{y} + O(x^n), \quad \deg(Q_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

On démontre ici que pour tout $n \geq 1$, les numérateurs $P_n$ définissent les corps abéliens réels $\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))$. Commençons par donner une expression explicite des polynômes $P_n$ et $Q_n$. On fixe $P_0 = 0$ et $Q_0 = 2$.

***Lemme 4.1.*** — *Les numérateurs $P_n(x)$ vérifient la relation de récurrence*

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + xP_{n-1}(x) \tag{7}$$

*pour tout entier $n \geq 1$ et sont donnés par l'expression suivante :*

$$P_n(x) = \frac{(\frac{1+y}{2})^n - (\frac{1-y}{2})^n}{y}. \tag{8}$$

*Les dénominateurs $Q_n(x)$ vérifient la relation de récurrence*

$$Q_{n+1}(x) = Q_n(x) + xQ_{n-1}(x)$$

*pour tout entier $n \geq 1$ et sont donnés par l'expression suivante :*

$$Q_n(x) = \left(\frac{1+y}{2}\right)^n + \left(\frac{1-y}{2}\right)^n. \tag{9}$$

*Démonstration.* — Listons les premiers termes $P_n$, pour $n \geq 0$

$$0, 1, 1, x+1, 2x+1, x^2+3x+1, 3x^2+4x+1, x^3+6x^2+5x+1, \ldots$$

Cela laisse entrevoir la récurrence (7). On tire de (7) une expression explicite de $P_n$ en fonction du discriminant, qui est égal à $1+4x = y^2$, et on obtient la forme annoncée en écrivant $P_1 = 1$ et $P_2 = 1$ d'une part, et $Q_1 = 1$ et $Q_2 = 1+2x$ d'autre part. Les expressions pour ces premières valeurs sont justifiées par $(1+4x)^{-1/2} = 1 + O(x) = P_1/Q_1$, et de même $(1+4x)^{-1/2} = 1 - 2x + O(x^2)$ et $\left(\frac{1+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[2+2y^2] = 1+2x$, et on a bien $P_2/Q_2 = (1+2x)^{-1} = 1-2x+O(x^2)$. Ce calcul est de plus compatible avec notre convention pour $P_0$ et $Q_0$.
Il nous suffit donc de vérifier que les polynômes ainsi définis correspondent bien aux approximants de Padé : de fait, par une induction immédiate, $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ est un polynôme de degré $\leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, et $Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ est de degré $\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
D'autre part, $1 - y = O(x)$, de sorte que

$$Q_n(x) = \left(\frac{1+y}{2}\right)^n + O(x^n) = yP_n(x) + O(x^n).$$

Ainsi $P_n/Q_n$ est bien l'approximant de Padé d'ordre $n$ de $1/y$. □

Nous allons maintenant voir que la forme explicite donnée en (8) permet de retrouver les propriétés énoncées dans le théorème 1.5.

*Démonstration du théorème 1.5.* —

– La forme (8) (resp. (9)) donne les divisibilités annoncées en (6) car si $n \mid m$, on a $a^n - b^n \mid a^m - b^m$ dans $\mathbb{Q}[a,b]$ (respectivement si $n \mid m$ et $m/n$ est impair, alors $a^n + b^n \mid a^m + b^m$).

– On déduit également de l'expression (8) les racines de $P_n(x)$ en fonction de $y = \sqrt{1+4x}$

$$P_n(x) = 0 \iff \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^n = 1,$$

ce qui redémontre la relation de divisibilité (6).

– Par ailleurs, soit $\zeta$ une racine $n$-ième de l'unité, alors

$$\frac{1+y}{1-y} = \zeta \iff y = \frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

d'où l'expression de $x$.

– $x \in \mathbb{Q}(\zeta) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$ car l'expression de $x$ est invariante par $\zeta \mapsto \zeta^{-1}$. Ceci implique $\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1}) = \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))$.

On a l'inclusion réciproque : si $y = \frac{\zeta-1}{\zeta+1}$ avec $\zeta = e^{i\theta}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$, alors $y^2 = -\tan^2(\frac{\theta}{2})$, de sorte que

$$\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos(\theta) = 2\frac{1+y^2}{1-y^2} \in \mathbb{Q}(x).$$

Ainsi le facteur (normalisé en fixant le terme constant égal à 1) de plus haut degré de $P_n(x)$ est

$$\Psi_n(x) = \prod_{d|n} P_d(x)^{\mu(\frac{n}{d})},$$

qui est un polynôme irréductible de degré $\frac{\varphi(n)}{2}$ qui définit $\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))$ et a pour groupe de Galois

$$G(\Psi_n) = G(P_n) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\}.$$

C'est la conclusion recherchée. □

**Remerciements.** — Les auteurs remercient l'IRN GANDA (CNRS) pour le soutien, ainsi que l'Université d'Antananarivo pour l'hospitalité. Ils remercient aussi Jean-François Mestre, Farbod Shokrieh et Laurent Berger pour leurs précieuses remarques. Merci à l'arbitre pour ses remarques utiles.

## Références

[1] S. Akhtari & N. Saradha, « Irreducibility of some orthogonal polynomials », *Indag. Math., New Ser.* **21** (2011), n° 3-4, p. 127-137.

[2] G. Butler & J. McKay, « The transitive groups of degree up to eleven », *Commun. Algebra* **11** (1996), n° 7, p. 863-911.

[3] J. W. S. Cassels, *Local Fields*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 3, Cambridge University Press, 1986, xiv+360 pages.

[4] A. Chambert-Loir, « The theorem of Jentzsch–Szegő on an analytic curve : application to the irreducibility of truncations of power series », *Int. J. Number Theory* **7** (2011), n° 7, p. 1807-1823.

[5] R. F. Coleman, « On the Galois groups of the exponential Taylor polynomials », *Enseign. Math.* **33** (1987), p. 183-189.

[6] K. Conrad, « Irreducibility of truncated exponentials », notes de cours en ligne disponibles sur `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/`.

[7] J. Cullinan, « On the jacobians of curves defined by the generalized Laguerre polynomials », *Exp. Math.* **28** (2019), p. 223-232.

[8] J. Cullinan & F. Hajir, « On the Galois groups of Legendre polynomials », *Indag. Math.* **25** (2014), n° 3, p. 534-552.

[9] J. Cullinan, F. Hajir & E. Sell, « Algebraic properties of a family of Jacobi polynomials », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **21** (2009), n° 1, p. 97-108.

[10] J. Cullinan & E. Sell, « On the arithmetic of Padé approximants to the exponential function », *J. Ramanujan Math. Soc.* **37** (2022), n° 3, p. 207-219.

[11] M. Filaseta & T.-Y. Lam, « On the irreducibility of the generalized Laguerre polynomials », *Acta Arith.* **105** (2002), n° 2, p. 177-182.

[12] M. Filaseta & O. Trifonov, « The irreducibility of the Bessel polynomials », *J. Reine Angew. Math.* **550** (2002), p. 125-140.

[13] F. Hajir, « Algebraic properties of a family of generalized Laguerre polynomials », *Can. J. Math.* **61** (2009), n° 3, p. 583-603.

[14] F. Hajir & S. Wong, « Specializations of one-parameter families of polynomials », *Ann. Inst. Fourier* **56** (2006), n° 6, p. 1127-1163.

[15] C. U. Jensen, A. Ledet & N. Yui, *Generic Polynomials, constructive aspects of the inverse Galois problem*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 45, Cambridge University Press, 2002, ix+258 pages.

[16] The LMFDB Collaboration, « The L-functions and Modular Forms Database, home page of the Galois groupe », 2024, `http://www.lmfdb.org/GaloisGroup`.

[17] P. Müller, « Finiteness results for Hilbert's irreducibility theorem », *Ann. Inst. Fourier* **52** (2002), n° 4, p. 983-1015.

[18] H. Padé, « Sur la répresentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles », *Ann. de l'Éc. Norm. (3)* **9** (1892), p. 3-93.

[19] The PARI Group, « PARI/GP version `2.11.2` », 2019, available from `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

[20] I. Schur, « Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen I », *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* **1929** (1929), p. 125-136.

[21] ———, « Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen II », *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* **1929** (1929), p. 370-391.

[22] ———, « Gleichungen ohne Affekt », *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* **1930** (1930), p. 443-449.

[23] ———, « Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome », *J. Reine Angew. Math.* **165** (1931), p. 52-58.

[24] K. M. Shokri, J. Shaffaf & R. Taleb, « Galois groups of Taylor polynomials of some elementary functions », *Int. J. Number Theory* **15** (2019), n° 6, p. 1127-1141.

Patrick Rabarison, Université d'Antananarivo, Départment de Mathématiques et d'Informatique, BP 906 - Antananarivo 101 - Madagascar • *E-mail :* prabarison@gmail.com

Fabien Pazuki, University of Copenhagen, Institute of Mathematics, Universitetsparken 5, 2100 Copenhagen, Denmark • Université de Bordeaux, IMB, 351, cours de la Libération, 33400 Talence, France
*E-mail :* fpazuki@math.ku.dk

Pascal Molin, Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris rive gauche UMR7586, 75013 Paris, France
*E-mail :* molin@math.univ-paris-diderot.fr